9. Die Analogie zwischen Mechanik und Elektrodynamik - der Dualismus innerhalb von Mechanik und Elektrodynamik

9.1 Die Analogie

Zwischen zwei physikalischen Gebieten besteht eine Analogie, wenn sich Größen des einen Gebiets so auf Größen des anderen abbilden lassen, daß die Beziehungen zwischen den Größen des einen Gebiets in richtige Beziehungen zwischen den Größen des anderen übergehen. Es gibt in der Physik mehrere solche Analogien. Wir beschäftigen uns hier mit einer Analogie zwischen Mechanik und Elektrodynamik. Die Größen, die einander entsprechen, sind in Tabelle 9.1 aufgeführt.

Die Erhaltungsgröße $\boldsymbol{p}$ wird auf die Erhaltungsgröße Q, die Energie auf sich selbst abgebildet.

Man sieht, daß man aus

$P = \Delta \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{F}$

durch rein formales Übersetzen

$P = U\, I$

bekommt.

Tabelle 9.1. Zueinander analoge Größen aus Mechanik und Elektrodynamik

Mechanik	Elektrodynamik
Impuls $\boldsymbol{p}$	elektrische Ladung Q
Kraft (Impulsstromstärke) $\boldsymbol{F}$	elektrische Stromstärke I
Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$	elektrisches Potential φ
Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta\boldsymbol{v}$	elektrische Spannung $\Delta\varphi=U$
Verschiebung $\Delta\boldsymbol{r}$	magnetischer Fluß $N\Phi$
Energie E	Energie E
Energiestromstärke P	Energiestromstärke P

Betrachtet man ein Objekt unter mechanischen Gesichtspunkten, so interessieren oft nur drei Eigenschaften:

- seine Trägheit
- seine Elastizität
- sein dissipatives Verhalten.

Der Ingenieur realisiert diese drei Eigenschaften gern durch räumlich getrennte Bauelemente, oder er zerlegt ein gegebenes System in Gedanken in Bauelemente, nämlich in solche, die

- träge, aber starr und reibungslos,
- elastisch, aber masse- und reibungslos und
- dissipativ, aber starr und masselos sind.

Jedes dieser drei Bauelemente denkt er sich noch insofern idealisiert, als die das Bauelement beschreibenden Variablen auf sehr einfache Art miteinander zusammenhängen. Diese idealisierten Bauelemente sind der Massenpunkt, die Feder und der Stoßdämpfer. Die diese Bauelemente charakterisierenden Beziehungen sind:

Massenpunkt: $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}$

Feder: $\boldsymbol{F} = D \Delta \boldsymbol{r}$

Stoßdämpfer: $\Delta \boldsymbol{v} = R_p\, \boldsymbol{F}$

In der Elektrizitätslehre ist die Situation analog. Auch hier zerlegt man ein Gebilde gern in Bauelemente, unter denen drei eine besondere Rolle spielen: der Kondensator, die Spule und der Widerstand. Auch diese Bauelemente werden näherungsweise durch drei sehr einfache Beziehungen charakterisiert:

Kondensator: $Q = CU$

Spule: $I = (N/L)\Phi$

Widerstand: $U = RI$.

Diese Bauelemente sind, wenn man die Übersetzungstabelle zu Grunde legt, den drei vorher genannten mechanischen analog, und wir können damit unsere Übersetzungstabelle erweitern, Tabelle 9.2. Die Liste der zueinander analogen Größen ist damit längst nicht erschöpft. Ein besonders interessantes Größenpaar stellen noch Drehimpuls (= Impulsmoment) und elektrisches Dipolmoment dar.

Tabelle 9.2. Zueinander analoge Größen und Begriffe aus Mechanik und Elektrodynamik

Mechanik	Elektrodynamik
Massenpunkt	Kondensator
Masse (Impulskapazität) m	Kapazität C
Feder	Spule
reziproke Federkonstante $1/D$	Induktivität L
Stoßdämpfer	Widerstand
mechanischer Widerstand R_p	elektrischer Widerstand R
Viskosität (Impulsleitfähigkeit) η	elektrische Leitfähigkeit σ

9.2 Der Dualismus

Außerdem existiert innerhalb der Mechanik eine Struktur, die wir Dualismus nennen wollen. Wegen der Analogie zwischen Mechanik und Elektrodynamik hat auch die Elektrodynamik diese duale Struktur. Worum handelt es sich dabei? Man verwandelt eine beliebige Anordnung aus den vorher beschriebenen Bauelementen nach bestimmten Regeln in eine andere Anordnung. Außerdem bildet man Größen nach bestimmten Regeln auf andere Größen ab. Die mathematische Struktur des alten Problems in den alten Größen ist dann dieselbe wie die des neuen Problems in den neuen Größen. Wendet man dieselben Übersetzungsregeln zweimal nacheinander an, so kommt man zum alten Problem zurück. In Tabelle 9.3 sind die sich entsprechenden Bauelemente, physikalischen Größen und "topologischen Regeln" aufgeführt.

Auch bei dem Dualismus spielt die Energie eine besondere Role: Sie ist selbstdual. Obwohl zu

Tabelle 9.3. Zum Dualismus in Mechanik und Elektrodynamik

	Mechanik	Elektrodynamik
Bauelemente	Massenpunkt ⇔ Feder Stoßdämpfer ⇔ Stoßdämpfer	Kondensator ⇔ Spule Widerstand ⇔ Widerstand
Größen	$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \Delta\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{F} \Leftrightarrow \Delta\boldsymbol{v}$ $m \Leftrightarrow 1/D$ $R_p \Leftrightarrow 1/R_p$ $E \Leftrightarrow E$ $P \Leftrightarrow P$	$Q \Leftrightarrow N\Phi$ $I \Leftrightarrow \Delta\varphi = U$ $C \Leftrightarrow L$ $R \Leftrightarrow 1/R = G$ $E \Leftrightarrow E$ $P \Leftrightarrow P$
topologische Regeln	Parallelschaltung ⇔ Reihenschaltung Knoten ⇔ Masche	

dem Bauelement Widerstand das Bauelement Widerstand dual ist, entspricht der Größe Widerstand deren Kehrwert, der Leitwert G.

9.3 Beispiel

Wir lösen ein mechanisches Problem, zusammen mit seinem elektrischen Analogon, Abb. 9.1. Die mechanische Version steht links, die elektrische rechts. Danach lösen wir die zu beiden Problemen dualen Versionen.

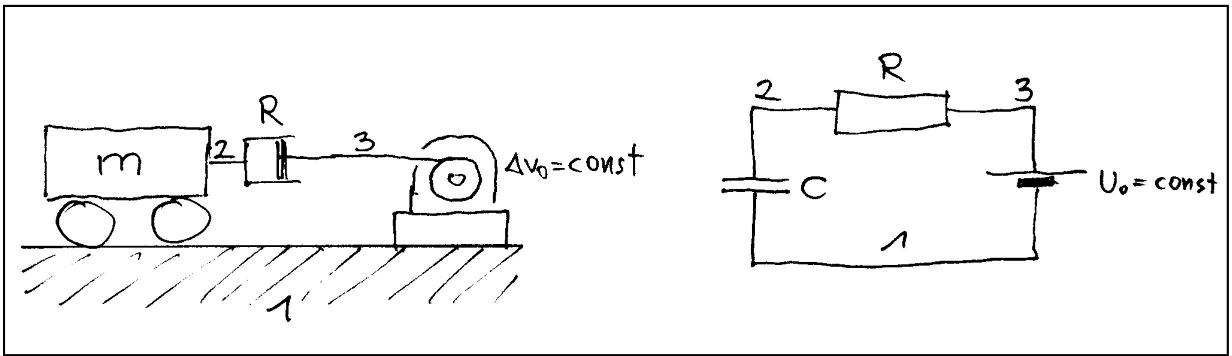

Abb. 9.1. Zwei zueinander analoge Systeme

Geschwindigkeitsdifferenzen bzw. elektrische Spannungen werden im Uhrzeigersinn gezählt (z. B. $\Delta v_R = v_2 - v_3$ oder $U_R = \varphi_2 - \varphi_3$). Der Index p am mechanischen Widerstand wird der Übersichtlichkeit wegen weggelassen. Wir wenden auf den Stromkreis die Maschenregel an:

$$\Delta v_0 + \Delta v_m + \Delta v_R = 0 \qquad \Big| \qquad U_0 + U_C + U_R = 0$$

Mit

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_R &= R \cdot F \\ p = m\Delta v_m &\Rightarrow F = m\Delta\dot{v}_m \end{aligned}\right\} \frac{\Delta v_R}{R} = m\Delta\dot{v}_m \qquad \Big| \qquad \left.\begin{aligned} U_R &= R \cdot I \\ Q = C \cdot U_C &\Rightarrow I = C\dot{U}_C \end{aligned}\right\} \frac{U_R}{R} = C\dot{U}_C$$

wird daraus

$$\Delta v_0 + \Delta v_m + Rm\Delta\dot{v}_m = 0 \qquad \Big| \qquad U_0 + U_C + RC\dot{U}_C = 0$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind:

$$\Delta v_m(t) = -\Delta v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{Rm}}\right) \qquad \Big| \qquad U_C(t) = -U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Daraus kann die Zeitabhängigkeit anderer Größen der Stromkreise berechnet werden.

$$\Delta v_R(t) = -\Delta v_0 - \Delta v_m(t) = -\Delta v_0 e^{-\frac{t}{Rm}}) \qquad \Big| \qquad U_R(t) = -U_0 - U_C(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$F(t) = -\frac{\Delta v_0}{R} e^{-\frac{t}{Rm}} \qquad \Big| \qquad I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Wir nennen

P_{total} = Gesamtstärke des Energiestroms von der Energiequelle (Motor bzw. Batterie) zu Massepunkt bzw. Kondensator und Stößdämpfer bzw. Widerstand

P_m und P_C = Stärke des Energiestroms zum Massepunkt bzw. zum Kondensator

P_R = Stärke des Energiestroms zum Stoßdämpfer bzw. zum Widerstand.

Man erhält

$$P_{\text{total}} = (\Delta v_m + \Delta v_R)F(t) = -\Delta v_0 F(t) = \frac{\Delta v_0^2}{R} e^{-\frac{t}{Rm}}$$

$$P_m = \Delta v_m(t)F(t) = \frac{\Delta v_0^2}{R} e^{-\frac{t}{Rm}} (1 - e^{-\frac{t}{Rm}})$$

$$P_R = \Delta v_R(t)F(t) = \frac{\Delta v_0^2}{R} (e^{-\frac{t}{Rm}})^2$$

$$P_{\text{total}} = (U_C + U_R)I(t) = -U_0 I(t) = \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$P_C = U_C(t)I(t) = \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$P_R = U_R(t)I(t) = \frac{U_0^2}{R} (e^{-\frac{t}{RC}})^2$$

In Abb. 9.2 sind P_{total}, P_R und P_m (bzw. P_C) als Funktion der Zeit dargestellt.

Der Vergleich der linken Seite unserer Rechnung mit der rechten zeigt, daß man sich die eine der beiden Rechnungen hätte sparen können: Man erhält sie durch rein formales Übersetzen aus der anderen Seite.

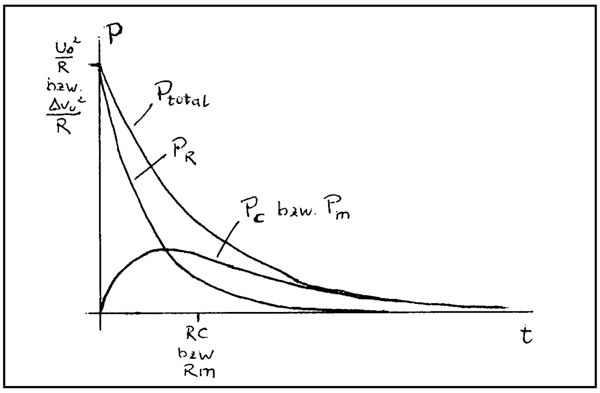

Abb. 9.2. Energiestromstärken als Funktion der Zeit

Mit Hilfe der Übersetzungsregeln des Dualismus verwandeln wir das Problem nun in ein neues, Abb. 9.3.

Stromstärken (auch Impulsstromstärken) werden zum Knoten K hin positiv gezählt.

Wir wenden auf K die <u>Knotenregel</u> an:

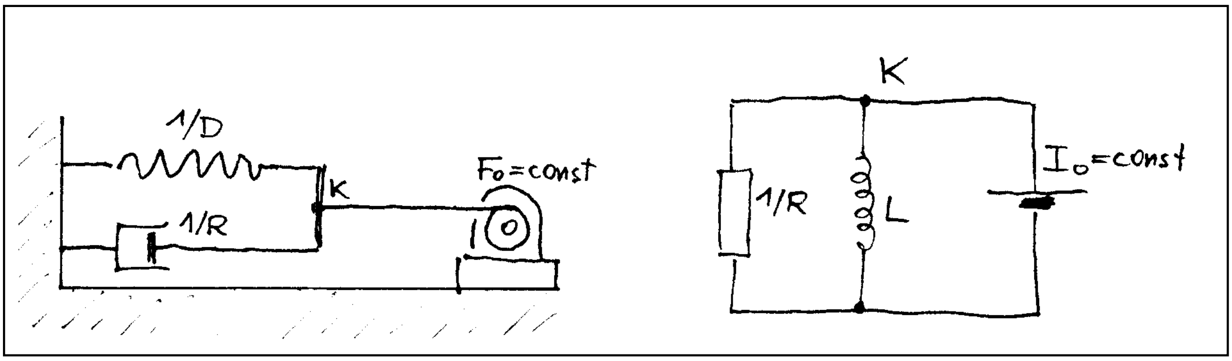

Abb. 9.3. Die Systeme sind zueinander analog, und zu denen in Abb. 9.1 dual.

$$F_0 + F_D + F_R = 0 \qquad\qquad I_0 + I_L + I_R = 0$$

Mit

$$\Delta v = F_R R = \frac{1}{D}\dot{F}_D \qquad\qquad U = I_R R = L\dot{I}_L$$

wird daraus

$$F_0 + F_D + \frac{1}{RD}\dot{F}_D = 0 \qquad\qquad I_0 + I_L + \frac{L}{R}\dot{I}_L = 0$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind:

$$F_D(t) = -F_0(1 - \mathrm{e}^{-RDt}) \qquad\qquad I_L(t) = -I_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$

Daraus folgt wieder die Zeitabhängigkeit anderer Größen. Wir führen die Rechnung nicht weiter, denn man sieht schon, wie die Sache läuft: Man erhält die Gleichungen in diesem Beispiel Zeile für Zeile aus denen des vorigen Beispiels durch Anwendung der Übersetzungsregeln des Dualismus.

Abb. 9.4 zeigt schließlich noch ein Problem einschließlich seines elektrischen Analogons und seiner beiden dualen Versionen, das dem vorigen sehr ähnlich ist. Wir überlassen die entsprechende Rechnung dem Leser.

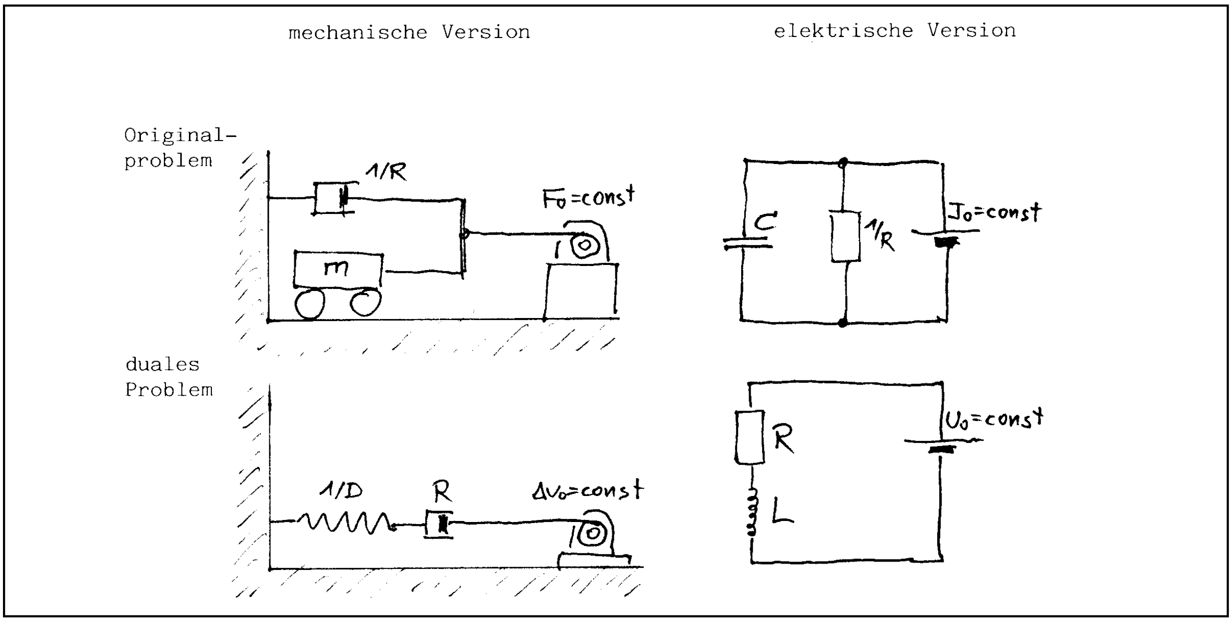

Abb. 9.4. Ein mechanisches System mit seinem elektrischen Analogon, sowie die beiden dualen Systeme

9.4 Mechanische Materialkonstanten

Wir hatten drei verschiedene mechanische Eigenschaften von Körpern ausgemacht: die Trägheit, beschrieben durch die physikalische Größe Masse m, die Elastizität, beschrieben durch die Federkonstante D und die Zähigkeit, beschrieben durch einen Reibungswiderstand R_p.

Die drei Größen m, D und R_p beziehen sich auf ein ausgedehntes Gebilde. Jede dieser Größen bringt aber eine Materialeigenschaft zum Ausdruck. Und diese drei Materialeigenschaften lassen sich auch durch lokale Größen beschreiben, durch sogenannte Materialkonstanten. In die globalen Größen m, D, und R_p gehen außer den lokalen Materialgrößen nur noch geometrische Größen ein.

Die Massendichte

Die die Trägheit beschreibende lokale Größe ist die Massendichte ρ. Man dividiert die in einem Raumbereich enthaltene Masse m durch das Volumen V des Raumbereichs und erhält die mittlere Dichte. Wenn das Volumen des Raumbereichs klein ist gegen das Gesamtvolumen des betrachteten Systems, so läßt man das Adjektiv "mittlere" weg und spricht einfach von der Dichte "an der Stelle" des gewählten Raumbereichs. Es ist also

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Der Elastizitätsmodul

Durch einen elastischen Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A fließe ein Impulsstrom der Stärke F. Solange der Impulsstrom fließt, ist der Stab um Δl gegenüber seiner Normallänge l verkürzt oder verlängert. Den Zusammenhang zwischen F und Δl beschreibt das Hookesche Gesetz:

$$F = D\Delta l$$

Der Wert der globalen Größe D, der "Federkonstante", ist von den Abmessungen des Stabes abhängig. D ist proportional zur Querschnittsfläche und umgekehrt proportional zur Länge l:

$$D = E\,\frac{A}{l}$$

Der Proportionalitätsfaktor E heißt Elastizitätsmodul des Materials. Er hängt nur vom Material des Stabes ab. Es ist also

$$E = \frac{l}{A}D$$

Die Viskosität

Die das dissipative Verhalten von Materie beschreibende lokale Größe hatten wir schon kennengelernt: Es ist die Viskosität η. Mit der globalen Größe R_p hängt sie zusammen über

$$\eta = \frac{l}{AR_p}$$

Die hier gegebene Beschreibung des elastischen und dissipativen Verhaltens der Materie ist stark vereinfacht. Tatsächlich kann weder das eine noch das andere durch eine einzige Zahl beschrieben werden. Eine vollständige Darstellung würde zeigen, daß sowohl Elastizitätsmodul als auch Viskosität sogenannte Tensoren sind. Tensoren sind mathematische Gebilde, zu deren Festlegung mehr als nur eine Zahl gebraucht wird. So ist der Elastizitätstensor durch 21 voneinander unabhängige Zahlen bestimmt. Falls das Material isotrop ist, reduziert sich diese Zahl allerdings auf 2. Eine davon ist der gerade diskutierte Elastizitätsmodul, die andere bringt zum Ausdruck, wie stark sich das Material in der Richtung quer zur angelegten Kraft verformt.