

## Einstieg in die Relativitätstheorie mit Modellbildung

M. Pohlig u. H. M. Strauch

Mit dem vorliegenden Artikel soll ein didaktischer Weg aufgezeigt werden, wie man im Rahmen des Mechanikunterrichts einen einfachen Zugang zur (speziellen) Relativitätstheorie finden kann. Zunächst wird aufgezeigt, wie man zur relativistischen Dynamik gelangen kann. Dadurch kann noch im Bereich des für alle verpflichtenden Physikunterrichts ein Zugang zu wichtigen und die Schüler in der Regel interessierenden Themen eröffnet werden. Außerdem stehen dann für den späteren Physikunterricht die grundsätzlichen Zusammenhänge der Relativitätstheorie zur Verfügung.

### 1 Ausgangssituation

Der Unterrichtsvorschlag geht davon aus, dass die Mechanik nach dem Karlsruher Physik Kurs (KPK)<sup>1)</sup> unterrichtet wurde (oder zumindest die unten aufgeführten Zusammenhänge den Schülern bekannt sind) und dass der freie Fall zuvor behandelt wurde (Das kann also auch in der Sekundarstufe I sein!). Vom zurückliegenden Physikunterricht werden folgende Ergebnisse benötigt:

Die physikalischen Größen Impuls  $p$ , Impulsstromstärke  $F$  und Energie  $E$  sind behandelt:

- Beziehung  $p = m v$ .
- Impulsstromstärke  $F = dp/dt$  bzw.  $F = \Delta p/\Delta t$
- Impuls als Energieträger und die Proportionalität der beiden Stromstärken:  $P = v F$  ( $P = \Delta E/\Delta t$ )

Auf dieser unterrichtlichen Grundlage wird nun ein Modellbildungswerkzeug wie z. B. Powersim Lite<sup>2)</sup> eingeführt, das aufgrund seines Leistungsvermögens für die angestrebten Ziele geeignet ist (weitere siehe [3]). Zum einen müssen die Schüler zunächst mit dem neuen Werkzeug vertraut werden, wobei es sich empfiehlt, anhand bekannter Zusammenhänge die erstellten Modelle zu kontrollieren, zum anderen wird das Grundmodell „Konstanter Impulsstrom in einen Körper“ später weiterentwickelt und modifiziert.

Aufbau und Symbole eines Modellbildungswerkzeuges lassen sich mit der Vorstellung von Strömen leicht verstehen, wie dies Abb. 1 und Abb. 2 zeigen.

In einen als Rechteck abstrahierten „Topf“ fließt der Strom einer Größe  $X$  hinein oder aus ihm heraus. Die Größe  $X$  kann sich dabei in diesem Topf anhäufen oder abnehmen. Der Doppelpfeil repräsentiert den Strom der Größe  $X$  und das runde Symbol, das an ein Ventil erinnert, legt die Stärke des Stromes ( $I_X$ ) fest. In der Sprache der Modellbildung spricht man von der Wachstumsgröße  $X$  und der Änderungsrate  $I_X$ . Im Physikunterricht nach dem KPK dagegen ist es nahe liegend in den „Töpfen“, mengenartige Größen wie Impuls, Energie, Ladung, Entropie, Stoffmen-

ge etc. zu haben. Die Änderungsrate  $I_X = \Delta X/\Delta t$  erhält dann die Bedeutung der zugehörigen Stromstärke ( $I_p = F$ ,  $I_E = P$ ,  $I_Q = I$ ,  $I_S$ ,  $I_n$ , etc.). Im Allgemeinen könnte der Strom der Größe  $X$  auch aus einem anderen „Topf“ kommen, wenn die Zunahme der Größe  $X$  in einem System auf Kosten der Abnahme der Größe  $X$  in einem anderen System geht. Doch in vielen Fällen ist es nicht wichtig, nicht interessant, woher die Größe  $X$  kommt, die in den „Topf“ hineinfließt oder sie kommt aus einem quasi unerschöpflichen Reservoir, dann wird die „Wolke“ verwendet. Ein Modellbildungssystem arbeitet eine Schleife ab, deren Rahmenbedingungen der Benutzer festlegt:

Xneu := Startwert

Schleife:

Xalt = Xneu

Xneu := Xalt + Änderung = X(t) +  $\Delta X/\Delta t \Delta t$

= X(t) +  $I_X \Delta t = X(t + \Delta t)$

Ende Schleife

### 2 Einsatz der Modellbildung im Unterricht

#### 2.1 Modell A1: konstanter Impulsstrom in einen Körper

Wir erstellen ein einfaches Modell, das verschiedenen konkreten Beispielen zugrunde liegt (ein Fahrzeug, das konstant beschleunigt, Elementarteilchen im Beschleuniger; etc.), siehe Abb. 3.

Da wir die Bewegung aus der Ruhe heraus simulieren möchten, wurde in diesem Modell der Startwert von  $p = 0$  (Hy) und  $F = 2$  (N) gewählt. Die Schleife läuft von  $t = 0$  (s) bis 1 (s) in Schritten von  $\Delta t = 0,001$  (s). Das mathematische Verfahren wurde auf Runge-Kutta-4 gestellt, was auch noch den späteren höheren Anforderungen genügt und deshalb nicht mehr geändert werden muss. Möchte man in diesem Modell die Geschwindigkeit  $v$  des Körpers haben, so muss man dafür zwei weitere Größen einfügen: Die konstante Masse  $m$  (Raute) und die Rechengröße  $v$  (Kreis). Damit die Größe  $v$  ihren Zahlenwert aus den Werten von  $m = 0,1$  (kg) und  $p$  berechnen kann, muss auch eine „Datenleitung“, von  $m$  nach  $v$  und von  $p$  nach  $v$  ergänzt werden. Erst dann kann  $v = p/m$  zugewiesen werden. Vom früheren Unterricht her ist den Schülern klar, dass ein konstanter Impulszufluss eine linear steigende Geschwindigkeit bewirkt. So wie bei konstantem Wasserzufluss in ein zylindrisches Gefäß, der Füllstand linear wächst (Abb. 4).

Durch Änderung der Optionen des Diagramms wurde erreicht, dass in einem  $v$ - $t$ -Diagramm mehrere Graphen für verschiedene Werte von  $m = 0,1, 0,2$  und  $0,3$  eingezeichnet wurden. Die  $p$ - $t$ -Diagramme wären dagegen alle gleich geblieben, da in unserem Modell der Impulszufluss als kon-

stant (und unabhängig von  $m$  angenommen wurde).

## 2.2 Modell B1: Freier Fall eines Körpers

Es gibt ein „Parallelmodell“ zu A, dargestellt in Abb. 5, das ebenfalls zum späteren Einstieg in die Relativitätstheorie geeignet ist und daher

- als Übung gestellt werden kann,
- bei Gruppenarbeit als Aufgabe für eine weitere Gruppe dienen kann,
- durch Vergleich der Ergebnisse mit denjenigen von Modell A weitere Einsichten vermitteln kann.

Die Rahmenbedingungen für die Schleife sind dieselben wie bei A.

Auch in diesem Modell wird der Startwert von  $p = 0$  (Hy) gesetzt. Als Masse wird  $m = 0,1$  (kg) gewählt. Anschließend wird wieder die Rechengröße  $v = p/m$  ergänzt. Bei verschiedenen Massen  $m = 0,1, 0,2, 0,3$  erhält man dieses Mal verschiedene  $p$ - $t$ -Diagramme aber immer dasselbe  $v$ - $t$ -Diagramm, wie Abb. 6 und 7 zeigen.

Aus  $p_1 = m_1 g t$ ;  $p_2 = m_2 g t$  und  $p_3 = m_3 g t$  folgt  $v_1 = p_1/m_1 = v_2 = p_2/m_2 = v_3 = p_3/m_3 = g t$ . Ein Ergebnis, das von der Behandlung des freien Falls bekannt ist. Solche bekannte oder leicht überprüfbare Ergebnisse der Simulation sind gerade in der Anfangsphase wichtig um die Korrektheit der Modelle zu kontrollieren.

## 2.3 Modell A2: konstanter Impulsstrom mit Energie

Da Impuls ein Energieträger ist, fließt also auch Energie in den beschleunigten Körper. Für diese mengenartige Größe benötigen wir einen eigenen „Topf“, in den der Energiestrom der Stärke  $I_E = v F$  fließt. Wir ergänzen das Modell entsprechend (Abb. 8) und lassen ein Phasendiagramm  $E(v)$  erstellen (Abb. 9).

Während beim Zeitplot immer  $t$  die unabhängige Variable ist und nur die abhängige Variable gewählt werden kann, wird beim Phasendiagramm eine beliebige Modellgröße A in Abhängigkeit einer anderen beliebigen Modellgröße B dargestellt.

Durch die Form des  $E$ - $v$ -Diagramms ergibt sich die Vermutung, dass hier ein quadratischer Zusammenhang vorliegt. Um zu überprüfen, ob es der bekannte Term der kinetischen Energie ist, wird eine weitere Rechengröße  $E_{kin} = v^2 \cdot m/2$  eingegeben, durch „Datenleitungen“ mit  $m$  und  $v$  verbunden, siehe Abb. 10. In einer Tabelle, Abb. 11, werden die Zahlenwerte von  $E$  und  $E_{kin}$  ausgegeben und verglichen (In Phasendiagrammen kann man leider nur eine Abhängigkeit darstellen).

## 2.4 Modell B2: Freier Fall mit Energie

Ganz entsprechend wie bei A ergänzen wir auch beim freien Fall die mengenartige Größe Energie, Abb. 12, und lassen das  $E$ - $v$ -Diagramm ausgeben (Abb. 13). Die Vermutung  $E = E_{kin}$  wird auch hier mit Hilfe der Rechengröße  $E_{kin} = v^2 \cdot m/2$  und einer gemeinsamen Tabelle (Abb. 14) überprüft.

## 2.5 Modell A3: Konstanter Impulsstrom mit neuem Axiom

Im Nachhinein hat sich herausgestellt, dass die Physiker eine Größe zweimal „erfunden“ haben und sie lediglich mit zwei verschiedenen Namen belegt und in zwei verschiedenen Einheiten gemessen haben: Masse und Energie. Wegen der verschiedenen Einheiten J und kg bedarf es

eines Proportionalitätsfaktors, den wir zunächst einfach  $k$  nennen wollen:

$$E = k m.$$

Die Einheit von  $k$  ist:  $[k] = J/kg = m^2/s^2$ .

Für unser Modell bedeutet dies, dass  $m$  keine Konstante mehr sein kann, da durch Zufuhr von Energie auch die Masse während der Beschleunigung zunimmt. Wir ersetzen also die Konstante  $m$  durch eine Rechengröße  $m$  und ziehen die zugehörigen „Datenleitungen“. Nun können wir  $m = E/k$  berechnen.

Von diesem modifizierten Modell A (Abb. 15) lassen wir uns das  $v$ - $t$ -Diagramm und das  $v$ - $p$ -Diagramm erstellen um sie mit dem Verhalten des bisherigen Modells A vergleichen zu können. Die beiden Diagramme zeigen wegen  $p \sim t$  ( $p = F t$ ) denselben Verlauf. Zunächst wächst  $v$  wie im klassischen Modell praktisch linear, d. h. der klassische Fall ist als Spezialfall in der relativistischen Situation enthalten. Aber dann nimmt  $v$  immer weniger zu, bis es sich schließlich asymptotisch dem Wert  $\sqrt{k}$  nähert. ( $[\sqrt{k}] = \sqrt{m^2/s^2} = m/s$ . Durch variieren von  $k$  kann man die Vermutung, dass die Asymptote  $\sqrt{k}$  ist, überprüfen). Obwohl ständig weiter ein konstanter Impulsstrom in den Körper hineinfließt, nimmt seine Geschwindigkeit immer weniger zu. Es gibt offensichtlich eine obere Grenze bei  $\sqrt{k}$ , die nicht überschritten werden kann, vergl. Abb. 16.

Dieses Verhalten muss an der veränderlichen Masse liegen. Wir lassen daher das  $m$ - $t$ - und das  $m$ - $p$ -Diagramm erzeugen, siehe Abb. 17 und Abb. 18.

Wir entnehmen den Diagrammen, dass die Masse mit der Zeit bzw. dem Impuls zunimmt. Bei  $t = 0$  bzw.  $p = 0$  findet man den Wert  $m_0 = E_{start} / k$ . Betrachtet man die größeren Werte von  $t$  bzw.  $p$ , so erkennt man ein fast lineares Wachstum. Das  $E$ - $t$ -Diagramm und das  $E$ - $p$ -Diagramm (in diesem Modell!) haben ebenfalls dieselbe Form, da  $E = k m$  gilt.

## 2.6 Wassermodell

An dieser Stelle empfiehlt es sich, den Schülern eine Veranschaulichung der Zusammenhänge anzubieten. Das bereits eingangs genannte Wassermodell (Abb. 19) kann hier helfen:

- Volumen  $V$  entspricht Impuls  $p$ :  
 $A h = V \leftrightarrow p = m v$
- Füllstand  $h$  entspricht Geschwindigkeit  $v$ :  
 $V/A = h \leftrightarrow v = p/m$
- Querschnittsfläche  $A$  entspricht Masse  $m$ :  
 $V/h = A \leftrightarrow m = p/v$

Die Newton'sche Mechanik mit konstanter Masse würde in diesem Bild durch ein Gefäß mit starren Wänden und daher konstantem Querschnitt  $A$  dargestellt. Relativistische Mechanik mit veränderlicher Masse dagegen durch ein Gefäß mit „elastischen“ Wänden und veränderlichem Querschnitt  $A$ . Je mehr Inhalt  $V$  das Gefäß hat, desto größer wird sein Querschnitt (Fassungsvermögen), vergleichbar mit einem Luftballon, der mit Wasser gefüllt wird. Eine Animation (siehe Abb. 20) verdeutlicht die zeitliche Entwicklung.

Zunächst nimmt die Fläche  $/ m$  nur wenig zu und der Füllstand  $/ v$  steigt fast linear an. Doch mit weiter zunehmender Fläche  $/ m$  steigt der Füllstand  $/ v$  immer weniger an, bis schließlich die erhöhte Fläche  $/ m$  das wachsende Volumen  $/ wachsenden$  Impuls  $p$  fast vollständig „kompensiert“.

siert“, so dass der Füllstand /  $v$  praktisch konstant bleibt, obwohl ständig noch Wasser /  $p$  zufließt.

## 2.7 Modell B3: Freier Fall mit neuem Axiom

Das Modell B mit dem neuen Axiom wurde bewusst zurückgehalten, da die Simulation im Wassermmodell darauf nicht zutrifft (der Wasserzufluss nimmt nun während des Vorganges zu und hat damit andere zeitliche Zusammenhänge zur Folge, die man besser mit der Modellbildung untersucht).

Die Änderungen im Modell sind ganz analog zu den Änderungen bei Modell A, vergl. Abb. 21. Auch hier lassen wir das  $v$ - $t$ - und das  $v$ - $p$ -Diagramm ausgeben, Abb. 22 und 23, und stellen fest, dass sie sich unterscheiden. Hier ist  $p$  nicht mehr proportional zu  $t$ ! Dennoch beobachtet man, dass der  $v$ - $p$ -Zusammenhang derselbe ist wie beim Modell A und demzufolge dieselben Ergebnisse festzustellen sind. Wenden wir uns dem  $m$ - $t$ - (bzw.  $E$ - $t$ -) und dem  $m$ - $p$ - (bzw.  $E$ - $p$ -) Diagramm zu, Abb. 24 und Abb. 25, so stellen wir hier noch einen deutlicheren Unterschied fest. Aber das  $m$ - $p$ - ( $E$ - $p$ -) Diagramm zeigt denselben Verlauf wie beim Modell A.

Daraus entnehmen wir, dass die Abhängigkeiten von  $p$  die allgemein gültigeren sind, und wir uns daher mit diesen weiter zu beschäftigen haben (Bei den Zeitabhängigkeiten machen sich die „Besonderheiten“ des konkreten Modells bemerkbar).

## 2.8 $m$ - $v$ -Zusammenhang

Neben dem  $m$ - $p$ - interessiert vor allem der  $m$ - $v$ -Zusammenhang, da es etliche experimentelle Befunde gibt, mit denen er überprüft wurde, vergl. Abb. 26.

Auch hier sind wieder zwei Besonderheiten zu erkennen: Für  $v = 0$  ist  $m = m_0$  und für  $v \rightarrow \sqrt{k}$  wird  $m$  beliebig groß. Dieses Diagramm und dieses Ergebnis sind in beiden Modellen identisch.

## 2.9 Terme der Asymptoten

Da Masse und Energie sich nur um den Faktor  $k$  unterscheiden, ist zu erwarten, dass das  $E$ - $p$ -Diagramm (Abb. 27) den analogen Verlauf zeigt wie das  $m$ - $p$ -Diagramm. Während nur im Modell A auch die Diagramme  $E$ - $t$  und  $m$ - $t$  dazu analog verlaufen! Abb. 28 zeigt den abweichenden Verlauf bei Modell B.

Für  $p = 0$  ist  $E = E_0$  (Ruhenergie  $E_0 = k m_0$ ). Für große  $p$  existiert eine lineare Approximation, die durch den Ansatz  $E_{\text{Grenz}} = \text{Faktor} \cdot p$  beschrieben wird. Der Faktor =  $E_{\text{Grenz}}/p$  kann als Steigung der Asymptoten aus dem Diagramm abgelesen werden: Faktor =  $\sqrt{k}$ . Durch Variieren der Zahlenwerte von  $k$  im Modell kann dies bestätigt werden. Damit erhält man für das  $m$ - $p$ -Diagramm die Asymptote

$$m_{\text{Grenz}} = \frac{E_{\text{Grenz}}}{k} = \frac{\sqrt{k}p}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}p.$$

Wenn zusätzlich eine algebraische Begründung gewünscht wird, könnte sie auf dem umgekehrten Weg gewonnen werden. Die Asymptote im  $m$ - $p$ -Diagramm beschreiben wir durch

$$m_{\text{Grenz}} = \frac{E_{\text{Grenz}}}{k} = \frac{\text{Faktor}}{k}p.$$

Da die Grenzggeschwindigkeit dann erreicht wird, wenn  $m$  die Asymptote erreicht gilt:

$$v_{\text{Grenz}} = \frac{p}{m_{\text{Grenz}}} = \frac{pk}{\text{Faktor} p} = \frac{k}{\text{Faktor}} = \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow \text{Faktor} = \sqrt{k}.$$

Eine Kontrolle des Terms der Asymptoten  $E_{\text{Grenz}} = \sqrt{k} p$  ist nur im Zeitdiagramm möglich. Da wiederum  $E$ - $t$ - und  $E$ - $p$ -Diagramm nur im Modell A3 (wegen  $p = Ft$ ) gleichen Verlauf haben, muss diese Kontrolle in diesem Modell im  $E$ - $t$ -Diagramm durchgeführt werden. Die zusätzliche Rechengröße  $E_{\text{Grenz}} = \text{sqrt}(k)*F*TIME$  wird im Modell ergänzt und im  $E$ - $t$ -Diagramm ausgeben lassen, Abb. 29. Entsprechend kann die Asymptote im  $v$ - $p$ - bzw.  $v$ - $t$ -Diagramm durch Hinzunahme der Rechengrößen

$$v_{\text{alt}} = F/1*k*TIME$$

(1 ist der Startwert von  $E$  im Modell) überprüft werden, siehe Abb. 30.

## 3 Identifikation von $k$

Der  $y$ -Achsenabschnitt im  $E$ - $p$ -Diagramm wurde als Ruhenergie  $E_0$  (= Startwert von  $E$ ) identifiziert. Verkleinert man nun im Modell diesen Startwert, so erhält man  $E$ - $p$ -Diagramme in Abb. 31 und Abb. 32, die sich immer mehr der Asymptoten nähern.

Im Grenzfall haben wir es mit Objekten zu tun, die keine Ruhmasse haben und sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\sqrt{k}$  bewegen (Steigung im  $E$ - $p$ -Diagramm siehe folgender Abschnitt). Wir kennen in der Physik solche Objekte, es sind die Photonen. Sie bewegen sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Daraus schließen wir:

$$\sqrt{k} = c \text{ bzw. } k = c^2.$$

## 4 Herleitung der Terme für die Zusammenhänge

Die vorliegenden Diagramme müssen systematisiert werden, damit man nicht die Orientierung verliert. Bei Verwendung von zwei verschiedenen Beispielen, treten Diagramme auf, die für beide Beispiele gleich sind und solche, die sich in den beiden Fällen unterscheiden. Da die Unterschiede nur bei den Zeitdiagrammen vorliegen, ist die erste Schlussfolgerung sich auf die Phasendiagramme zu konzentrieren, da sie in beiden Fällen dieselben Zusammenhänge zeigen. Doch auch dann gibt es zwölf verschiedene, die unterschiedlich wichtig sind. Die zentralen Überlegungen waren:

Die Masse wächst durch Energiezufuhr

Die Energie wird in unseren Beispielen von Träger Impuls begleitet

Also beginnen wir mit dem *Energie-Impuls-Zusammenhang*  $E(p)$  und suchen seine Beschreibung durch einen Term.

Das  $E$ - $p$ -Diagramm zeigt zwei auffällige Besonderheiten:

Für  $p \rightarrow 0$  geht  $E(p) \rightarrow E_0$ .



Für  $p \rightarrow \infty$  geht  $E(p) \rightarrow$  Faktor  $p$ , wobei sich der Faktor als  $c$  herausstellt (Durch die Wahl von Quadratzahlen für  $k$  gelangt man rasch zur Vermutung, dass die Steigung des  $E$ - $p$ -Diagramms  $c$  ist, was man durch Variation von  $k$  im Modell überprüfen kann). Der Graph besitzt also für große  $p$  die Asymptote  $\sqrt{k} p = c p$ .

Der Term für  $E(p)$  besitzt also die beiden Bestandteile  $E_0$  und  $c p$ . Da der Impuls je nach Bewegungsrichtung positive und negative Werte annehmen kann, die Energie dagegen nur nichtnegative Werte haben kann, darf man die beiden Bestandteile nicht einfach addieren, da sie sich sonst teilweise aufheben könnten. Die Vermutung

$$E(p) = E_0 + c|p|$$

kann aber nicht richtig sein, da ihr Graph für  $p > 0$  eine Gerade mit der Steigung  $c$  durch den Achsenabschnitt  $E_0$  wäre, was offensichtlich nicht der Fall ist, vergl. Abb. 33. Es gilt aber die Abschätzung  $E(p) \leq E_0 + c|p|$ . Die Identität  $|x| = \sqrt{x^2}$  für  $x \geq 0$  dagegen bringt uns auf die Idee zu quadrieren und später die Wurzel zu ziehen:  $E^2(p) \leq E_0^2 + 2E_0 c|p| + c^2 p^2$ . Durch Weglassen eines Teilterms wird der Ausdruck auf der rechten Seite verkleinert, was schließlich zur Vermutung führt:  $E^2(p) = E_0^2 + c^2 p^2$  bzw.

$$E(p) = \sqrt{E_0^2 + c^2 p^2}.$$

Diese Vermutung (wie auch andere mögliche Terme) kann als Rechengröße  $E_p$  im Modellbildungssystem eingegeben und durch Vergleich der Zahlenwerte in einer gemeinsamen Tabelle mit  $E(p)$  überprüft werden. Im Rahmen der Rechengenauigkeit wird man Übereinstimmung der beiden feststellen, was als Bestätigung der Vermutung gewertet werden kann. Damit liegt der erste Term vor (siehe auch [4]):

$$E(p) = \sqrt{E_0^2 + c^2 p^2}. \quad (1)$$

Die aufgezeigten Überlegungen können ebenso auf das  $m(p)$  Diagramm angewendet werden und liefern dann den Term für  $m(p)$ .

Die zentrale Frage, die uns bei den weiteren Überlegungen leitet, ist: *Wovon hängt die Masse ab?* Nachdem wir bereits gesehen haben, dass die Zeitabhängigkeit nichts ausagt, da sie von der konkreten Art und Weise der Energie- bzw. Impulszufuhr abhängt, bleiben nur die Größen  $p$  und  $v$  übrig.

Schritte der Termumformung:

$$E = c^2 m$$

$$p = m v$$

Auflösen nach der unabhängigen Variablen

Die Grundannahme  $E = c^2 m$  legt die Umformung nahe, den Term  $E(p)$  durch  $c^2$  zu dividieren und so

$$\begin{aligned} m(p) &= \sqrt{\left(\frac{E_0}{c^2}\right)^2 + \frac{c^2 p^2}{c^4}} \\ &= \sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

zu erhalten. In diesem Term ersetzen wir  $p$  durch  $m v$ :

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{v^2}{c^2} m^2}.$$

Quadrieren und auflösen nach  $m$  liefert:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Die Multiplikation mit  $v$  liefert

$$p(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

Dieser Term wird nach  $v$  aufgelöst und man erhält:

$$\begin{aligned} v(p) &= \frac{m_0 v}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{m_0}{p}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Auch die Terme (2), (3) und (5) werden anhand der Modellbildungssoftware mit den dort gewonnen Zusammenhängen verglichen und im Rahmen der Rechengenauigkeit bestätigt. Falls man zunächst  $m(p)$  gewonnen hatte, wird analog zunächst  $E(p)$  daraus gewonnen und danach die genannten Umformungen durchgeführt.

Die Modellgrößen  $E$ ,  $p$ ,  $m$  und  $v$  können in zwölf verschiedenen wechselseitigen Abhängigkeiten zueinander stehen, die wiederum untereinander zusammenhängen. Wenn man auf  $E(m) = c^2 m$  und  $m(E) = E/c^2$  verzichtet, bleiben noch zehn wechselseitige Abhängigkeiten übrig. Damit ergeben sich etliche Möglichkeiten, um ausgehend von  $E(p)$  (oder wahlweise auch von  $m(p)$ ) zu  $m(v)$  und  $v(p)$  zu gelangen. Man kann es daher den Schülern überlassen, welche „Wege“ sie wählen möchten. Nur zum Überblick über die Zusammenhänge ein Diagramm, siehe Abb. 34. Dabei symbolisieren die gepunkteten Kanten (in  $z$ -Richtung) das Auflösen des Terms nach der unabhängigen Variablen, die durchgezogenen Kanten (in  $x$ -Richtung) Multiplikation mit  $c^2$  bzw. Division durch  $c^2$  und die gestrichelten Kanten (in  $y$ -Richtung) Umformungen, die mit Hilfe von  $p = m v$  gemacht werden.

## Literatur

- [1] F. Herrmann: Der Karlsruher Physikkurs Band 1; Aulis Verlag Deubner Köln; ISBN 3-7614-2095-1; 1997
- [2] Powersim Constructor Version 2.510 1993-2000 Powersim AS. Sandbrugaten 5-7, P.O.Box 3961 Dreggen N-5835 Bergen, Norway, Phone: +47 55 60 65 00 Fax: +47 55 60 65 01 E-Mail: help@powersim.no, orders@powersim.no Weitere Modellbildungssysteme siehe: [www.uni-klu.at/unilJu/index.jsp](http://www.uni-klu.at/unilJu/index.jsp)
- [3] PsLite und weitere Modellbildungssysteme: [www.uni-klu.ac.at/users/gossimit/sw/sdsw.htm](http://www.uni-klu.ac.at/users/gossimit/sw/sdsw.htm)
- [4] M. Pohlig: Ein alternativer Zugang zur speziellen Relativitätstheorie, PdN-PhiS 1/52 (2003)

## Anschriften der Verfasser:

StD Michael Pohlig, Schaafweide 21, 76467 Bietigheim; OStR Hans M.

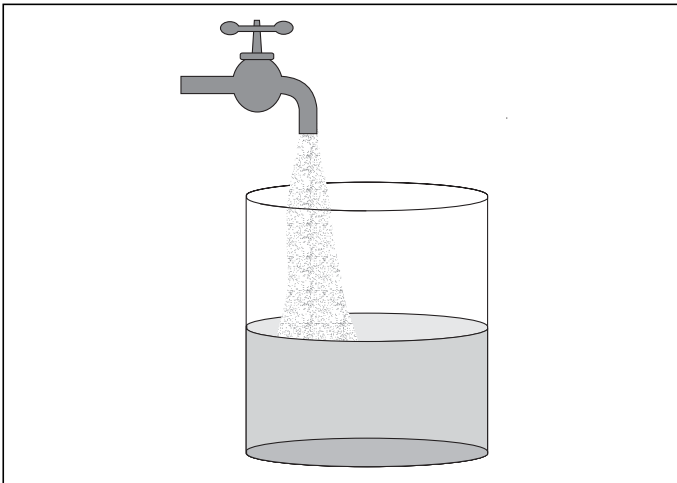


Abb. 1: Wasserstrom fließt in ein Gefäß

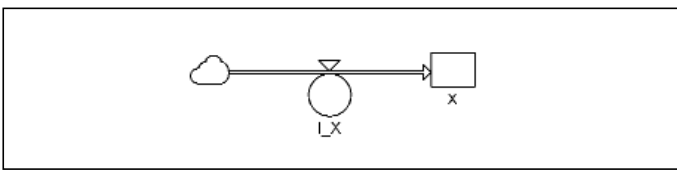


Abb. 2: Doppelpfeil symbolisiert den Strom der Größe X. Die Änderungsrate I\_X legt die Stromstärke fest.

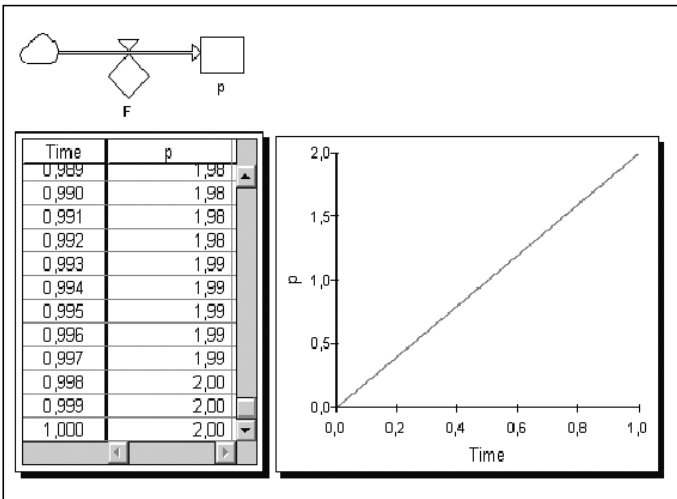


Abb. 3: Powersimmodell A1, Ausgabe des berechneten  $p$ - $t$ -Verlaufs als Tabelle und als Graph

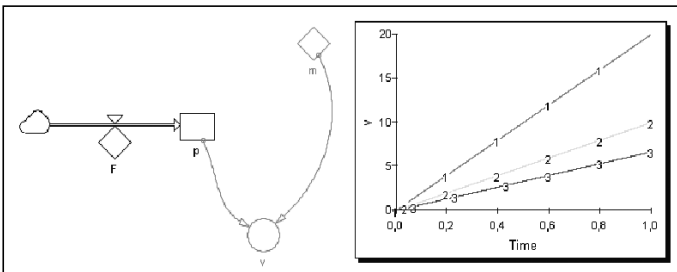


Abb. 4: Ergänzt Modell A1 und mehrere  $v$ - $t$ -Diagramme zu verschiedenen Massen in einem Fenster

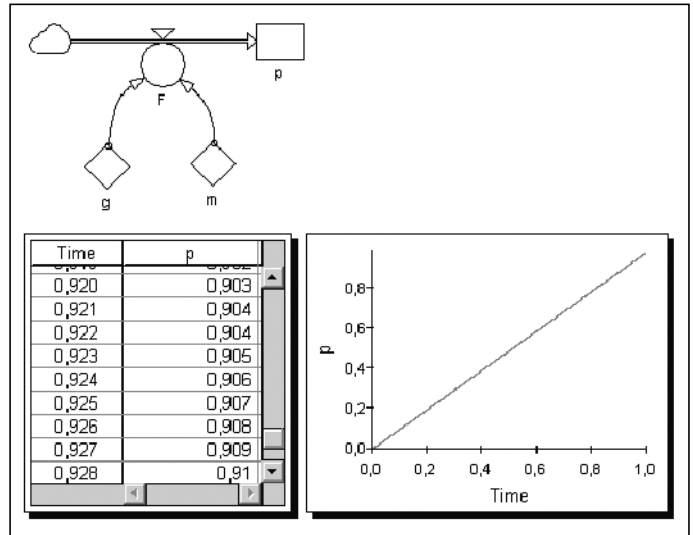


Abb. 5: Modell B1, Ausgabe des berechneten  $p$ - $t$ -Verlaufs als Tabelle und als Graph.

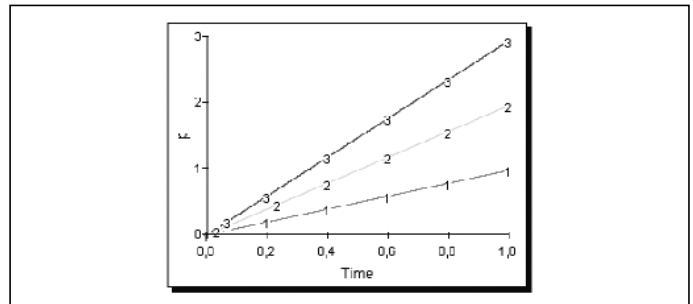


Abb. 6: B1:  $p$ - $t$ -Diagramme zu verschiedenen Massen in einem Fenster

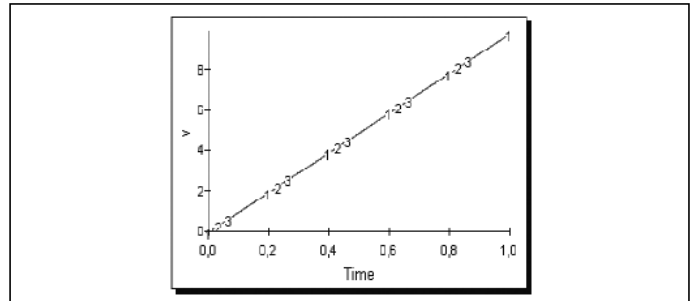


Abb. 7: B1:  $v$ - $t$ -Diagramme zu verschiedenen Massen in einem Fenster

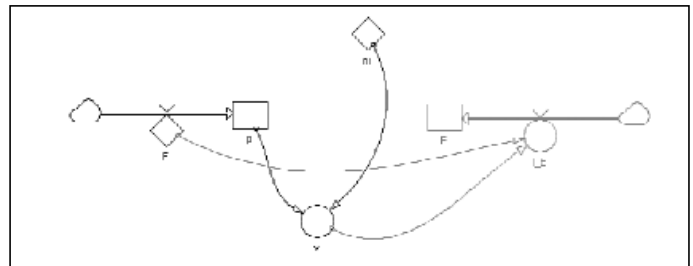


Abb. 8: Modell A1 ergänzt um die Energie ergibt Modell A2

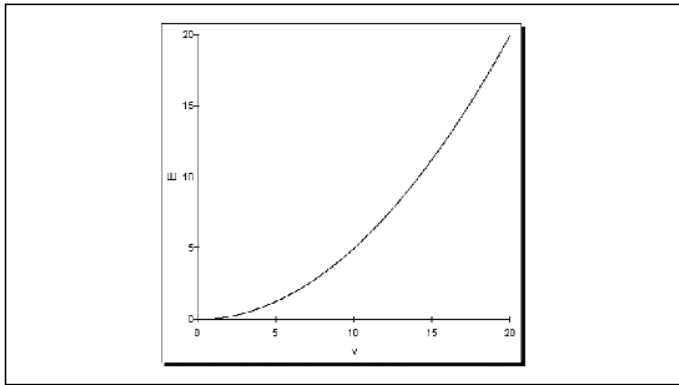


Abb. 9: A2:  $E$ - $v$ -Diagramm

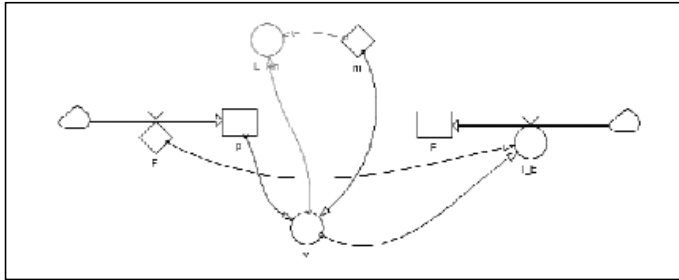


Abb. 10: A2 ergänzt um die Rechengröße  $E_{kin}$

Time	E	$E_{kin}$
0,992	19,68	19,68
0,993	19,72	19,72
0,994	19,76	19,76
0,995	19,80	19,80
0,996	19,84	19,84
0,997	19,88	19,88
0,998	19,92	19,92
0,999	19,96	19,96
1,000	20,00	20,00

Abb. 11: Vergleich der Werte  $E_{kin}$  und  $E$  für alle  $t$

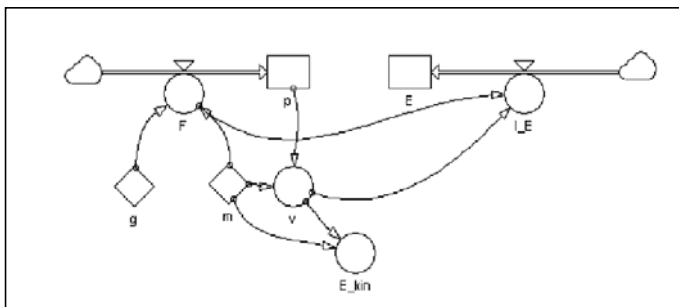


Abb. 12: Modell B1 ergänzt um  $E$  und  $E_{kin}$  ergibt Modell B2

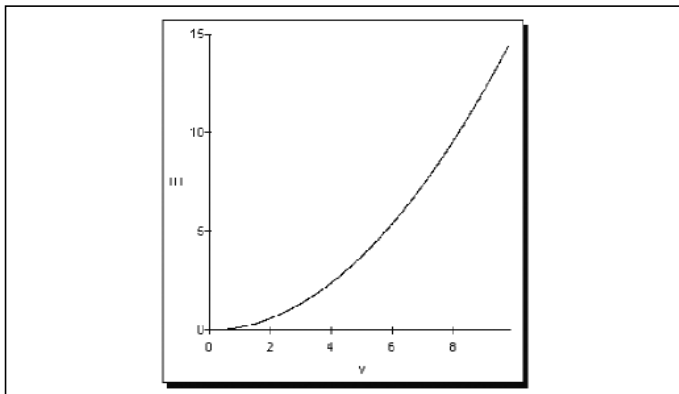


Abb. 13: B2:  $E$ - $v$ -Diagramm

Time	E	$E_{kin}$
0,998	14,09	14,09
0,999	14,12	14,12
0,990	14,15	14,15
0,991	14,18	14,18
0,992	14,21	14,21
0,993	14,23	14,23
0,994	14,26	14,26
0,995	14,29	14,29
0,996	14,32	14,32
0,997	14,35	14,35
0,998	14,38	14,38
0,999	14,41	14,41
1,000	14,44	14,44

Abb. 14: B2: Vergleich der Werte  $E_{kin}$  und  $E$

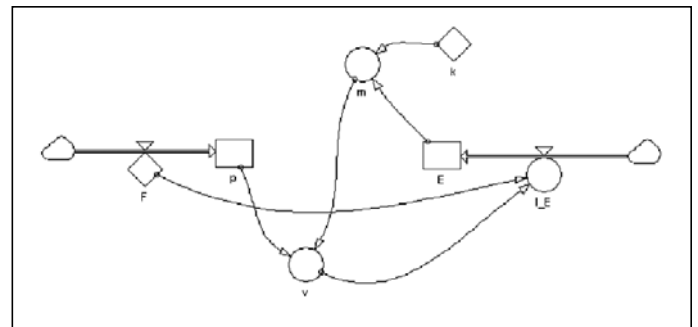


Abb. 15: Modell A2 mit veränderlicher Masse  $m = E/k$  ergibt Modell A3

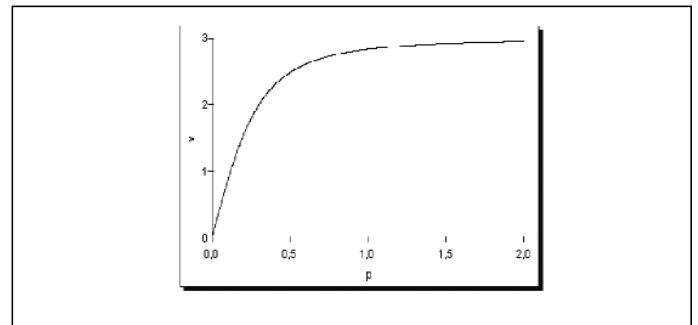


Abb. 16:  $v$ - $p$ -Diagramm mit oberer Grenze  $\sqrt{k}$

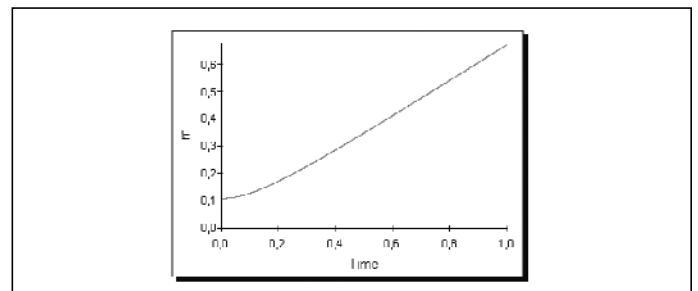


Abb. 17: A3:  $m$ - $t$ -Diagramm

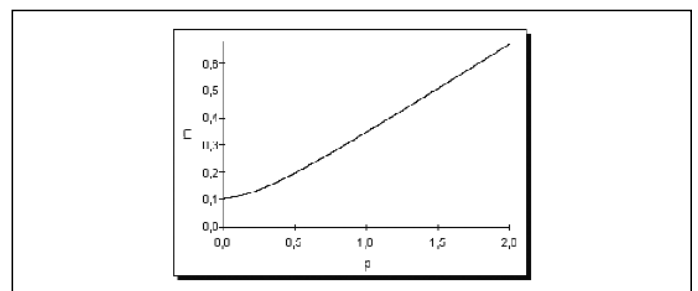


Abb. 18: A3:  $m$ - $p$ -Diagramm

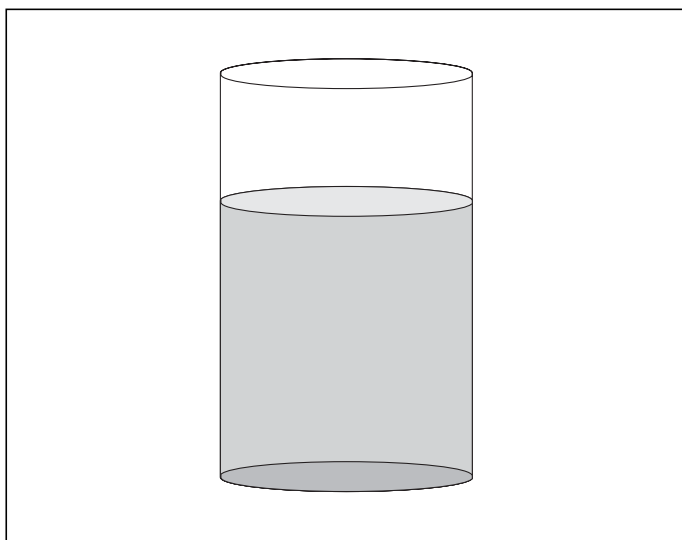


Abb. 19: Analogiemodell für  $p$

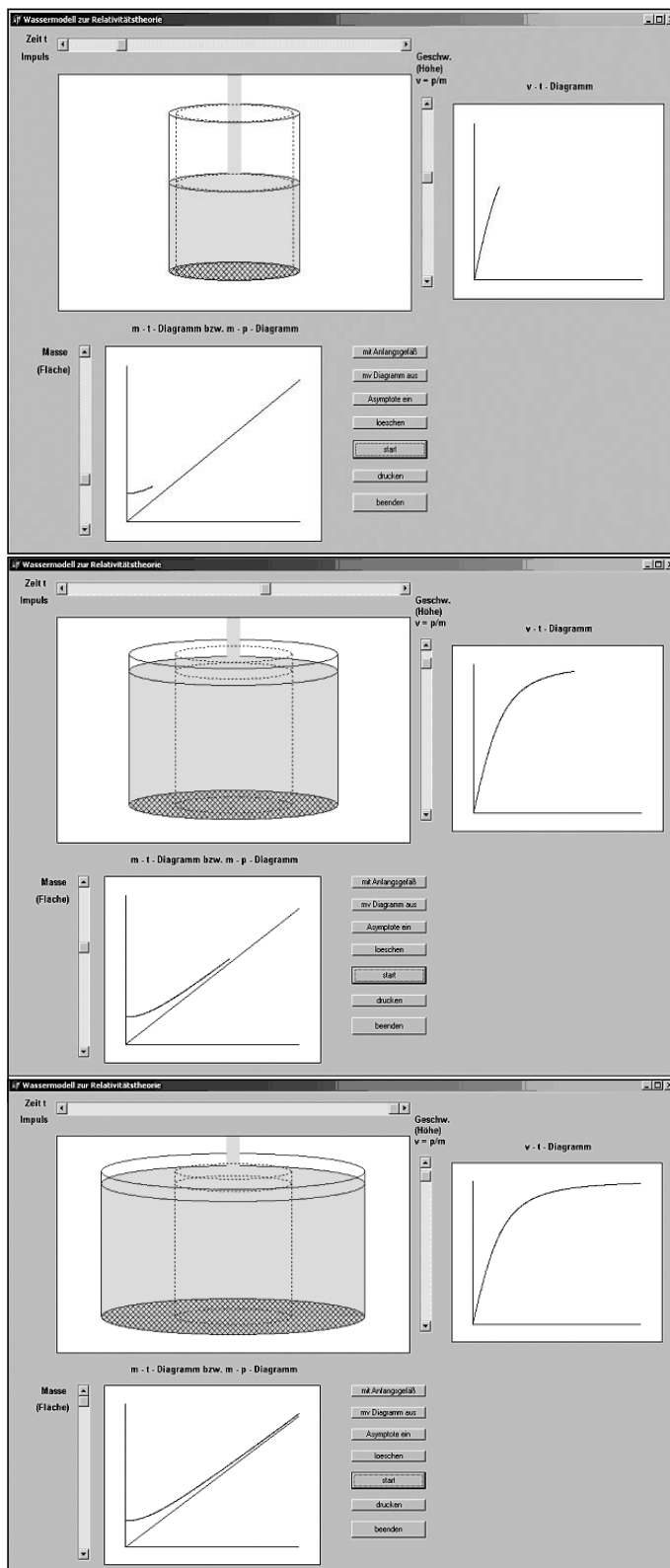


Abb. 20: Simulation: Füllen eines Gefäßes mit elastischen Wänden im zeitlichen Verlauf

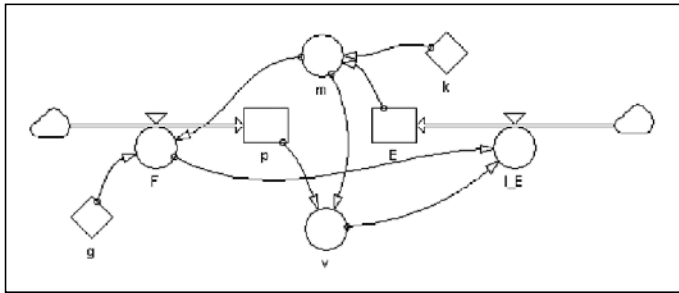


Abb. 21: Modell B2 mit veränderlicher Masse  $m = E/k$  ergibt Modell B3

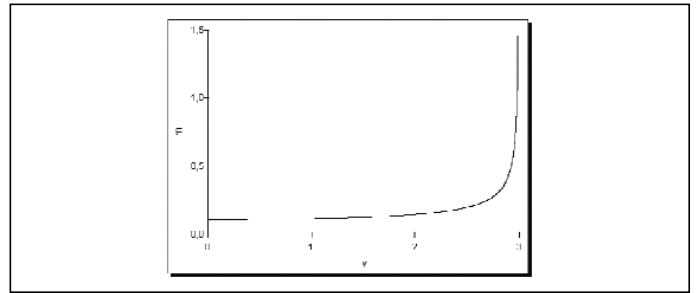


Abb. 26:  $m-v$ -Zusammenhang für beide Modelle

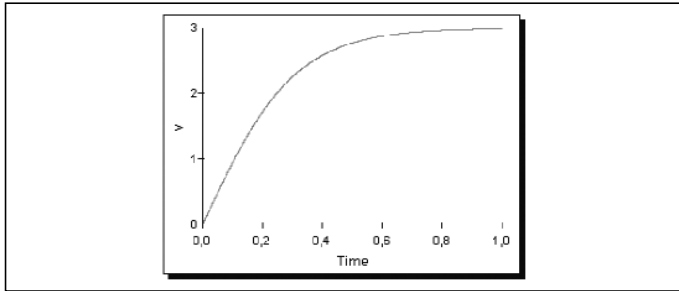


Abb. 22: B3:  $v-t$ -Zusammenhang

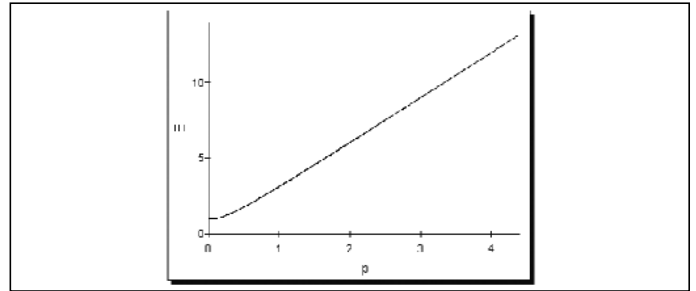


Abb. 27:  $E-p$ -Diagramm für beide Modelle

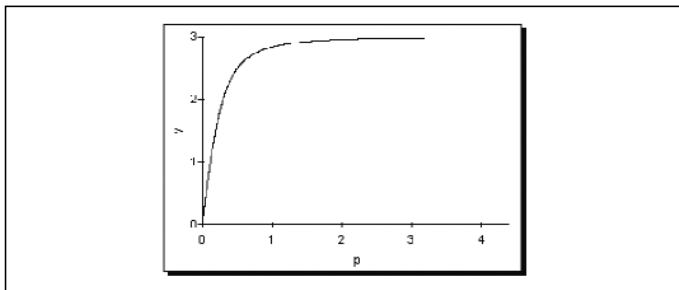


Abb. 23: B3:  $v-p$ -Zusammenhang

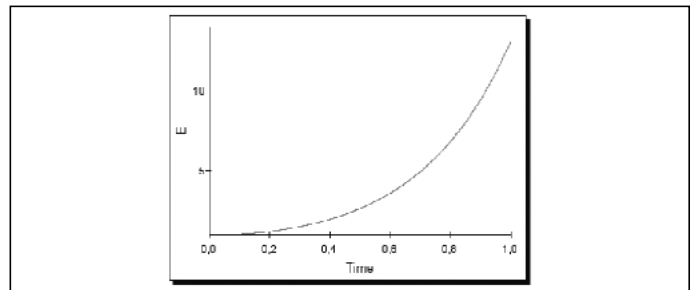


Abb. 28: B3:  $E-t$ -Diagramm

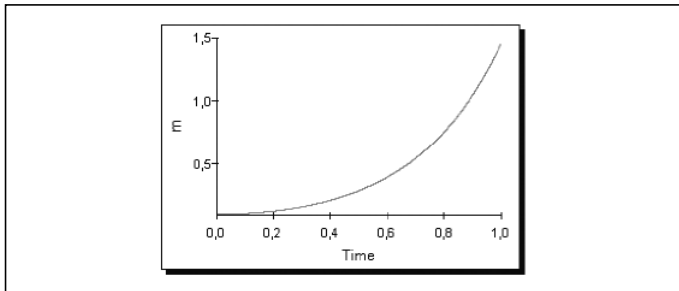


Abb. 24: B3:  $m-t$ -Diagramm

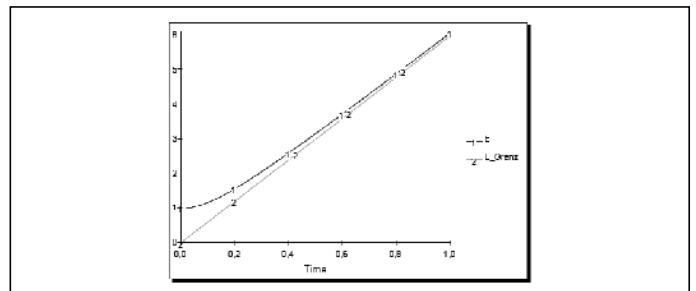


Abb. 29: A3:  $E-t$ - und  $E_{Grenz-t}$ -Zusammenhang  $m_0 = 1/k$

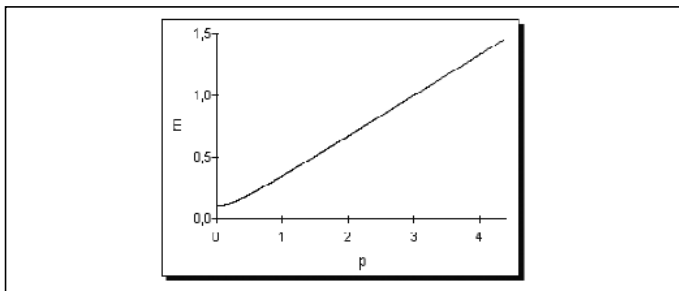


Abb. 25: B3:  $m-p$ -Diagramm

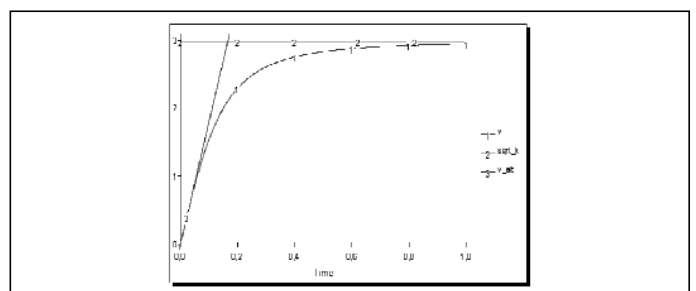


Abb. 30: A3:  $v-t$ - und  $v_{alt-t}$ -Zusammenhang



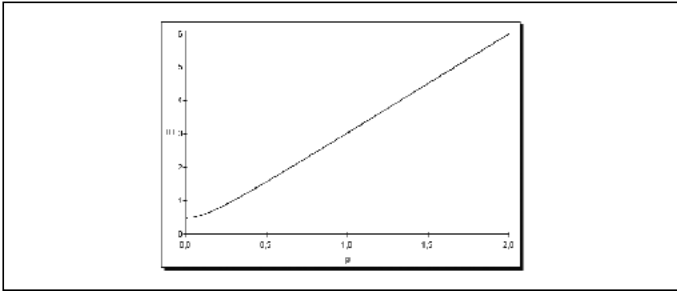


Abb. 31:  $E$ - $p$ -Diagramm für  $m_0 = 0,5/k$  (50% von  $m_0$  aus Abb. 31)

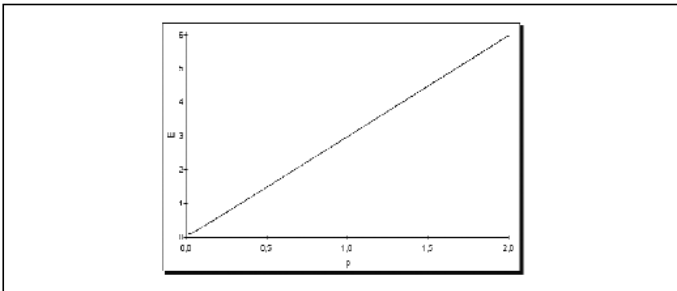


Abb. 32:  $E$ - $p$ -Diagramm für  $m_0 = 0,1/k$  (10% von  $m_0$  aus Abb. 31)

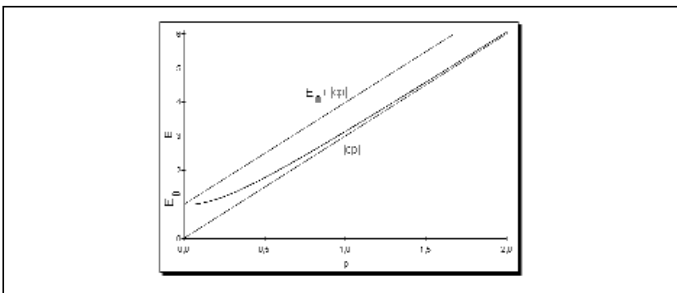


Abb. 33:  $E$ - $p$ -Zusammenhang abgeschätzt durch  $E_0 + |cp|$  und  $|cp|$

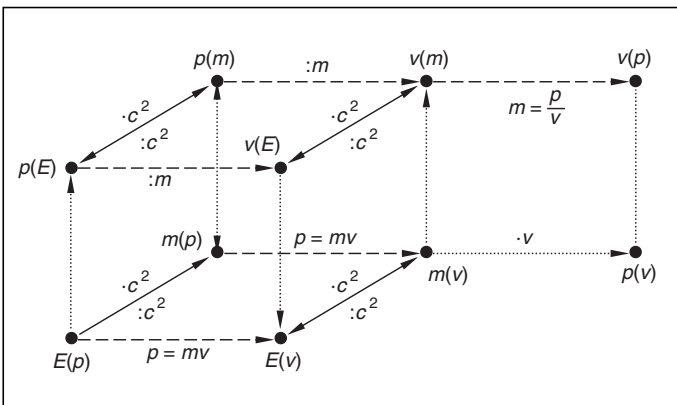


Abb. 34: Wechselseitige Abhängigkeiten der 10 Terme und die erforderlichen Umformungen